jan 12. T604

(12×3 p.) **I. A minimumkövetelményből.**

1. Mit jelent, hogy egy $f: A \to B$ függvény injektív?

$\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$

2. Mit jelent, hogy egy A halmaz végtelen?

Nem létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy A és az $\{1, 2, .., n\}$ halmaz között megadható bijekció

3. Hogyan definiáltuk az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz infimumát?

A legnagyobb alsó korlát, tehát a legnagyobb olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $\forall a \in A$-ra $c \leq a$. Ha A alulról nem korlátos, akkor $\inf A = -\infty$

4. Mit jelent, hogy egy $a \in \mathbb{R}$ pont az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz belső pontja?

$\exists r > 0$, hogy $(a-r, a+r) \subset A$

5. Legyen $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat. Definiálja a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ mennyiséget.

A részsorozatok határértékei között (az $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ halmazban) a legkisebb elem.

6. Írja le a sorokra vonatkozó Ábel-féle konvergencia kritériumot.

Ha $a_n \to 0$ korlátos változású és $\sum b_n$ korlátos részletösszegű, akkor $\sum a_n b_n$ konvergens és $|\sum a_n b_n| \leq \sum |a_{n+1} - a_n| \cdot \sup_n |S_n(b)|$. Ha a_n korlátos változású és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n b_n$ konvergens

7. Írja le a sorok konvergenciára vonatkozó Mertens-tételt.

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens és legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzat is konvergens és $\sum c_n = \sum a_n \cdot \sum b_n$. Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ is abszolút konvergens, akkor $\sum c_n$ is az

8. Írja le a l'Hospital-szabályt.

f és g diffható $0 < |x-a| < \delta$-n és $\delta > 0$-ra, g'-nek itt nincs gyöke, $\lim_a f = \lim_a g = 0$ vagy $\lim_a |g| = +\infty$. Ha $\lim_a \frac{f'}{g'} = \beta$, akkor $\lim_a \frac{f}{g} = \beta$. A többi határérték-típusra is érvényes.

9. Írja le a Lagrange-féle középérték tételt.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, diffható (a,b)-n $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$, hogy $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

10. Mit jelent, hogy egy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény végtelenszer differenciálható?

f és bármely deriváltja minden valós helyen deriválható

11. Írja le az $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény $[a,b]$ intervallum $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ felosztásához tartozó oszcillációs összegét.

$$\Omega_\Phi f = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{[x_i, x_{i+1}]} f - \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \right)(x_{i+1} - x_i)$$

12. Írja le a függvények integrálhatóságára vonatkozó Lebesgue-tételt.

Egy korlátos $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény integrálható $[a,b]$-n $\Leftrightarrow$ szakadási helyeinek halmaza nullmértékű

II. Igaz vagy Hamis? Az állítás előtti I vagy H betűt karikázza be annak megfelelően, hogy az állítás igaz vagy hamis. *(15× 3 p.)*

1. I H Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik határértéke az $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor f folytonos.
2. I H Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor ott létezik határértéke.
3. I H Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor a $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(g(x))$ függvény Riemann-integrálható.
4. I H Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos.
5. I H Cauchy-sorozatnak minden részsorozata Cauchy-sorozat.
6. I H $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$
7. I H Minden n-ed fokú polinomnak a 0 körüli n-ed fokú Taylor-polinomja éppen önmaga.
8. I H Minden korlátos $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén $\sup A \in A$.
9. I H $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
10. I H Ha p, q *igaz* és r *hamis* állítás, akkor $\neg(r \to (p \wedge q))$ *hamis* állítás.
11. I H Ha $f, g :]0,1[\cup]2,3[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvények és $f' = g'$, akkor van olyan $C \in \mathbb{R}$ szám, melyre $f = g + C$ teljesül.
12. I H Ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrálható folytonos függvény, akkor az $f(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$ függvényre $f'(x) = \varphi(x)$ teljesül.
13. I H Bijekciók kompozíciója bijekció.
14. I H Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = 1$.
15. I H Nulla mértékű halmaz minden részhalmaza nulla mértékű.

(10 p.) **III. Bizonyítás.** Bizonyítsa be, hogy ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke A és B, akkor $A = B$ $(A, B \in \mathbb{R})$.

Indirekt feltevés: $A \neq B$

Legyen $\varepsilon = \frac{|B-A|}{2}$. Mivel $a_n \to A$ és $a_n \to B$ ezért $\exists N_A, N_B \in \mathbb{N}$ hogy $\forall n \geq N_A$-ra $|a_n - A| < \varepsilon$

$\forall n \geq N_B$-re $|a_n - B| < \varepsilon$

Ezért ha $n \geq \max(N_A, N_B)$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$, $|a_n - B| < \varepsilon$

$\Rightarrow |A-B| = |(A-a_n)+(a_n-B)| \leq |A-a_n| + |a_n-B| < \varepsilon + \varepsilon = |B-A|$

Azaz $|A-B| < |B-A|$ ↯ Ezért $A = B$ $\square$

IV. Ellenpélda. *(3×3 p.)*

1. Adjon meg egy olyan $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}^+$ függvényt, mely egyenletesen folytonos, de $\frac{1}{f}$ már nem egyenletesen folytonos.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

2. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot, melyre $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ teljesül.

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{\pi}{n}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racionális} \\ 0 & x \text{ irracionális} \end{cases}$

3. Adjon példát olyan $x, y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nullához tartó sorozatra, melyen egyetlen tagja sem nulla, s melyekre az $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ sorozat konvergens, $\frac{y_n}{y_{n+1}}$ sorozat pedig divergens!

$x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{2^{n^2}}$

(4×4 p.) **I. Határozatlan integrál.** Adja meg az alábbi integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{2x^2+9x+7}{(x-1)\underbrace{(x^2+4x+4)}_{(x+2)^2}}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\right)dx = (*)$

$A = \left.\dfrac{2x^2+9x+7}{(x+2)^2}\right|_{x=1} = \dfrac{18}{9} = 2, \quad \dfrac{2x^2+9x+7-2(x+2)^2}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, ezért

$(*) = \displaystyle\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx = 2\ln|x-1| - \frac{1}{x+2} + C, \quad x \neq 1, -2$

2. $\displaystyle\int \operatorname{ch}(2x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int\left(e^{x}+e^{-3x}\right)dx =$

$= \dfrac{1}{2}\left(e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-3x}\right) + C$

$t = \sqrt[5]{x-2}$
$x = 2+t^5$
$dx = 5t^4\,dt$

3. $\displaystyle\int x\sqrt[5]{x-2}\,\mathrm{d}x$ (Útmutatás: célszerű a $t = \sqrt[5]{x-2}$ helyettesítés.)

$\displaystyle\stackrel{\downarrow}{=} \int (2+t^5)\cdot t\cdot 5t^4\,dt = \int\left(5t^{10}+10t^5\right)dt = \frac{5}{11}t^{11} + \frac{10}{6}t^6 + C =$

$= \dfrac{5}{11}(x-2)^{\frac{11}{5}} + \dfrac{10}{6}(x-2)^{6/5} + C$

4. $\displaystyle\int \cos^3 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \cos x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\sin^2 x\,dx$

$\displaystyle= \int \cos x\sin^2 x\,dx - \int \cos x\sin^4 x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

II. Határozott integrál. Az alábbi (I_1, I_2, I_3) számok értéke egy-egy pozitív egész szám. Mik ezek a számok konkrétan? *(3×5 p.)*

1. $I_1 = \int_0^{2\,\mathrm{sh}\,8} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{x^2}{16}}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{2\,\mathrm{sh}8} \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = 2\cdot 2\cdot \left[\mathrm{arsh}\frac{x}{2}\right]_0^{2\,\mathrm{sh}8} = 2\cdot 2\cdot 8 = 32$

2. $I_2 = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{12x}{\pi} + 2\,\mathrm{tg}^2\,x\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\left(\underbrace{\left[\frac{6}{\pi}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}}_{\frac{2\pi}{3}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx\right) =$

$= \sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\left[\mathrm{tg}\,x - x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\underbrace{\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 6$

3. $I_3 = \int_1^{\mathrm{e}} 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[x\ln x\right]_1^e}_{e} - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx = e-(e-1) = 1$

(2×5 p.) **III. Határozott integrál alkalmazásai.**

1. Mutassa meg, hogy az $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb felszíne $4R^2\pi$. (Útmutatás: az R sugarú félkőr grafinkonját az x tengely körül megforgatva gömböt kapunk, melynek felszíne integrálással számolható.)

$x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin t,\ 0 \le t \le \pi$ görbét megforgatva

$$F = 2\pi \int_0^\pi y \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 2\pi \int_0^\pi R\sin t \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,dt =$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin t\,dt = 2\pi R^2 [-\cos t]_0^\pi = 4\pi R^2.$$

Másképpen: $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},\ -R \le x \le R$-et megforgatva

$$F = 2\pi \int_{-R}^{R} f\sqrt{1+f'^2} = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2+x^2}\,dx =$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$= 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

2. Határozza meg annak az alakzatnak a felszínét, melyet a ch függvény $[0, 1]$ intervallum feletti görbéjének az x-tengely körüli megforgatásával kapunk.

$$F = 2\pi \int_0^1 f\sqrt{1+f'^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch} x \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\,dx.$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{2} + \left[\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{8}\right]_0^1\right) \cancel{=2\pi}$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2}{4}\right) = \pi\left(1 + \frac{\operatorname{sh} 2}{2}\right).$$

IV. Improprius integrál. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e, és ha igen, számolja ki értéküket. *(3×3 p.)*

1. $L_1 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$ $= \underbrace{\left[-\ln x \cdot \frac{1}{x}\right]_1^\infty}_{0} + \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$

2. $L_2 = \displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x$ $= \underbrace{\left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty}_{0} + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^\infty = \frac{1}{4}$

3. $L_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x$ divergens, mert $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x}$ $(0, 1)$-en,
és $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{0+}^1 = +\infty$

(5×10 p.) **V. Vegyes feladatok.**

1. Mutassa meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$ teljesül.

Számtani és mértani közép egyenlőtlensége:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 1.$$

2. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 3^n - 2^n}{7\cdot 6^n}$ sor? Ha igen, számolja is ki az értékét.

$$\frac{4}{7}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n - \frac{1}{7}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{4}{7}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{7}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{7}-\frac{1}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Mindkét mértani sor konvergens, mert $|q|<1$

3. Egy $R \in \mathbb{R}^+$ rugarú félgömb fölé egyenes körkúpot állítunk, úgy hogy a kúp alapköre koncentrikus a félgömb alapkörével. Mekkora legyen a kúp magassága, hogy térfogata a lehető legkisebb legyen.

Hasonló háromszögekből $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R^*}{h} = \frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}$

$$V = \frac{1}{3}h\cdot R^{*2}\pi = \frac{\pi}{3}h\left(\frac{Rh}{\sqrt{h^2-R^2}}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{3}\,\frac{h^3}{h^2-R^2}$$

Tehát keressük $f(h)=\frac{h^3}{h^2-R^2}$ maximumát,

ha $h>R$. $f' = \frac{3h^2(h^2-R^2)-2h\cdot h^3}{(h^2-R^2)^2} = h$

4. Számolja ki a $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ határértéket. $= \lim\limits_{0+0} e^{\frac{\ln(1+3x^2)}{1-\cos x}} = (*)$

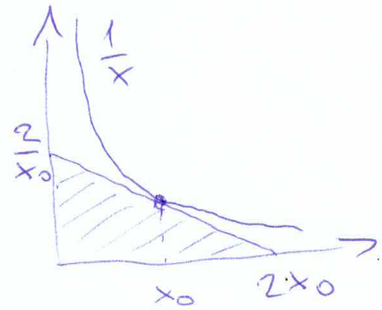
$$\lim_{0+0}\frac{\ln(1+3x^2)}{1-\cos x} \underset{\frac{0}{0}, l'H}{=} \lim_{0+0}\frac{\frac{6x}{1+3x^2}}{\sin x} = \lim_{0+0}\frac{6}{1+3x^2}\cdot\frac{x}{\sin x} = \frac{6}{1}\cdot 1 = 6$$

Ezért $(*) = e^6$

5. Mutassa meg, hogy az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvénynek bármely $x_0\in\mathbb{R}^+$ pontban húzzuk meg az érintőjét, az érintőegyenes és koordináta tengelyek által meghatározott háromszög területe mindig ugyanannyi.

Az érintő $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$, azaz

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x-x_0), \quad y + \frac{x}{x_0^2} = \frac{2}{x_0}$$



A tengelymetszetek:

$y=0 \Rightarrow x = 2x_0$; $x=0 \Rightarrow y = \frac{2}{x_0}$

A háromszög területe

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x_0}\cdot 2x_0 = 2$$